

Calcolo di R con il metodo di Kohlberg-Neyman e specificazione sulle zone di Verona e Provincia

22 novembre 2020

Ipotesi e grandezze utilizzate Il metodo di Kohlberg-Neyman è un modello approssimato che permette di calcolare il numero di riproduzione di base R in modo facilmente ottenibile e implementabile, descrivendone la natura e le caratteristiche. In queste note ci occuperemo del calcolo di tale valore e del suo adattamento per le zone di Verona e provincia.

Inizialmente si definiranno le variabili in gioco e, tenendo conto di alcune approssimazioni chiave, si giungerà ad una descrizione semplice e intuitiva di questo importante parametro.

Iniziamo con un'ipotesi cardine: *soltanto* le persone infettate recentemente (vedremo poi cosa si intende con "recentemente") causano ulteriori infezioni, questo perché:

- una volta trovato positivo, un soggetto viene messo in isolamento domiciliare.
- dopo un periodo di tempo, a causa del decorso naturale della malattia, il soggetto non è più contagioso.

In questa ipotesi, è chiaro quindi che converrà concentrarsi solo sui *nuovi* casi positivi, dato che sono gli unici che, fino a che non vengono individuati, contribuiscono alla progressione dell'epidemia[1].

Definiamo R , chiamato numero di riproduzione di base, come il numero di "nuove infezioni", dette infezioni secondarie, causate in media da ogni soggetto positivo. Ad esempio avere $R = 2.5$ significa che, prima di essere trovato posto in isolamento, ogni soggetto infetto contagia in media altre 2.5 persone. Risulta chiaro anche intuitivamente che se $R > 1$, allora con il tempo il numero di pazienti trovati positivi aumenterà mentre, se $R < 1$, il numero di nuovi positivi diminuirà fino ad annullarsi; nel caso invece in cui $R = 1$, il numero di nuovi casi si manterrà costante.

Abbiamo quindi che R ci fornisce una descrizione qualitativa su quanto sia infettivo il virus nel contesto in cui ci troviamo. Sarà influenzato sia dalla natura del virus sia dal comportamento dei cittadini. Viene infatti riscontrato che senza adottare misure di prevenzione, come ad esempio il distanziamento sociale, R risulta essere compreso tra 2 e 3[1].

Definiamo inoltre D , chiamato intervallo di generazione, come il tempo che intercorre tra il momento in cui un soggetto diventa positivo e il momento in cui infetta in media R persone.

Esempio: ipotizziamo di avere $R = 2$, se il soggetto A diventa positivo il giorno 0 e il giorno 4 ha infettato 2 persone, allora avremo $D = 4$ giorni.

Chiaramente al valore di D contribuiranno le proprietà intrinseche del virus, quindi il suo periodo di incubazione e di infettività. Infatti per contagiare R persone un positivo deve diventare contagioso e deve passare un periodo di tempo da contagioso. Per convenzione definiamo

$$D \simeq \text{periodo di incubazione} + \frac{1}{2} \text{periodo di infettività} \quad (1)$$

Calcolo di R Proviamo ora, ipotizzando di avere R e D fissati, a effettuare una previsione dell'andamento dei contagi giornalieri $C(t)$.

Alla luce di quanto detto prima, se un soggetto dopo D giorni ha infettato R persone, allora, avendo C_0 nuovi contagi il giorno iniziale, avremo

$$C(D) = RC_0$$

Dato che D può essere stimato e i valori $C(D)$ e C_0 sono noti, allora in generale possiamo dire che

$$R = \frac{C(D)}{C_0}$$

generalizzando, ponendosi al giorno t abbiamo quindi

$$R(t) = \frac{C(t)}{C(t-D)} \quad (2)$$

E' importante far notare che anche se viene testata solo una percentuale dei positivi (che ipotizziamo costante nel tempo), questo non influirà sul valore di R .

Un problema più consistente è dovuto alle fluttuazioni di $C(t)$, grandezza che infatti può variare considerevolmente nei vari giorni per cause non strettamente legate al virus (ad esempio il numero di tamponi). Per ovviare questo problema, Kohlberg e Neyman propongono di mediare il numero di nuovi positivi in un intervallo N di giorni precedenti.[1]

$$R = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} C(t-i)}{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} C(t-D-i)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} C(t-i)}{\sum_{i=0}^{N-1} C(t-D-i)} \quad (3)$$

che corrisponde a sommare i contagi degli ultimi N giorni e dividerli per i contagiati dei N giorni precedenti.

Esempio con parametri fissati Ipotizziamo di avere un contesto in cui $C_0 = 100$ positivi, $R = 2$ e $D = 4$ giorni. Dopo 4 giorni avremo $C(4) = RC_0 = 200$ positivi, dopo 8 giorni $C(8) = RC(4)$ ecc. Possiamo quindi esprimere $C(t)$ come una funzione della forma

$$C(t) = C_0 R^{\frac{t}{D}} = 100 2^{\frac{t}{4}}$$

che ha l'andamento riportato in figura.

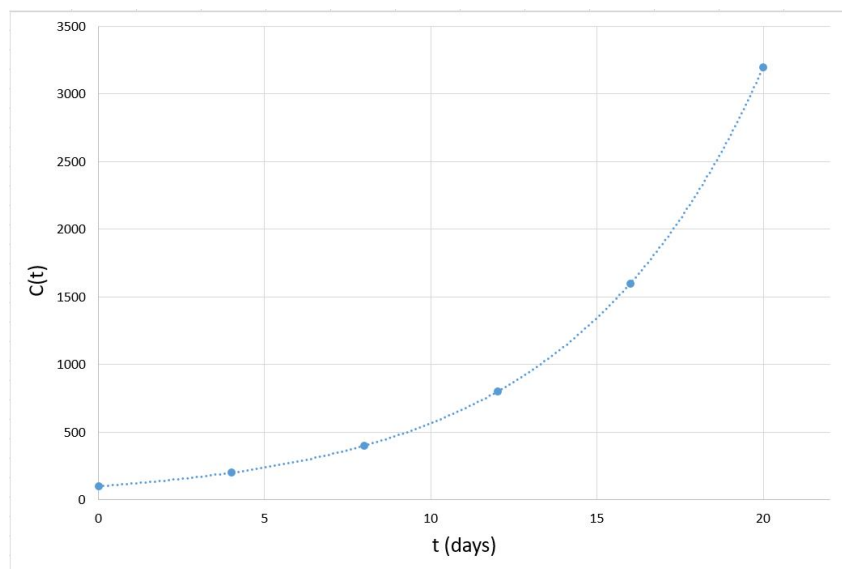


Figura 1: Andamento del numero di contagiati giornalieri ipotizzando $C_0 = 100$, $D = 4$, $R = 2$.

Notiamo che scegliendo la $R > 1$ questa curva è crescente, se scegliessimo $R < 1$ avremmo:

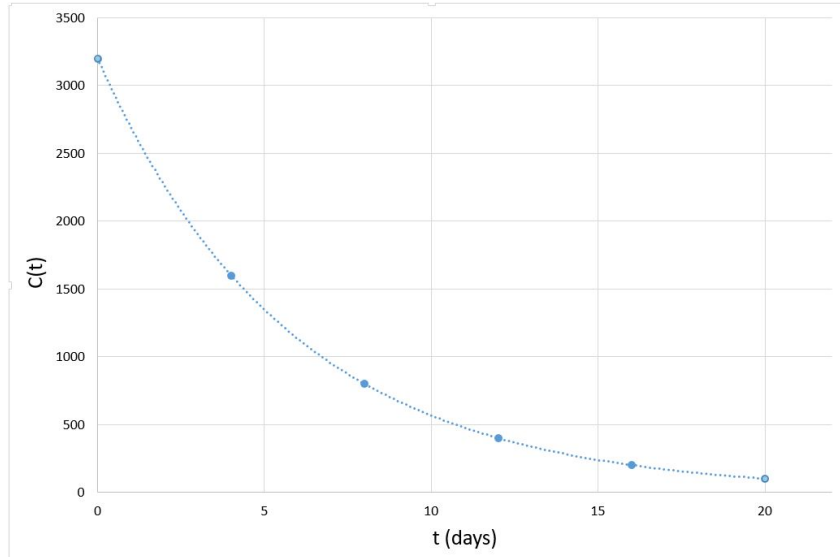


Figura 2: Andamento del numero di contagiati giornalieri ipotizzando $C_0 = 3200$, $D = 4$, $R = \frac{1}{2}$

Calcolo di $R(t)$ per la Verona e Provincia Ad oggi, in accordo con gli studi condotti, in Italia il periodo di incubazione del virus risulta compreso tra 2 e 11 giorni (con una media che approssimeremo a 6 giorni)[2]. Ipotizziamo il periodo di infettività corrispondente al periodo di positività dei soggetti che, in analogia con la durata dell'isolamento domiciliare, risulta essere di 10 giorni [3]. Alla luce di questo possiamo stimare $D = 11$ giorni (equazione 1). Per quanto riguarda N , dato che le principali variazioni dovute ai tamponi variano settimanalmente, conviene mediare su 7 giorni, $N = 7$. Avremo quindi che al giorno t , la formula per il calcolo di R con il metodo di Kohlberg-Neyman vale:

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^6 C(t-i)}{\sum_{i=0}^6 C(t-11-i)} \quad (4)$$

Per comprendere quanto sia importante la scelta di N e di D e quanto da essa dipenda l'andamento di $R(t)$, mostriamo ora un grafico che confronta il numero di riproduzione di base in funzione del tempo calcolato con:

- il metodo appena ricavato (equazione 4)
- l'equazione 3, ipotizzando $N = 4$ e $D = 4$
- l'equazione 2

I dati sono relativi a Verona e provincia e ricoprono un intervallo di tempo compreso tra l'1 settembre e il 13 novembre.

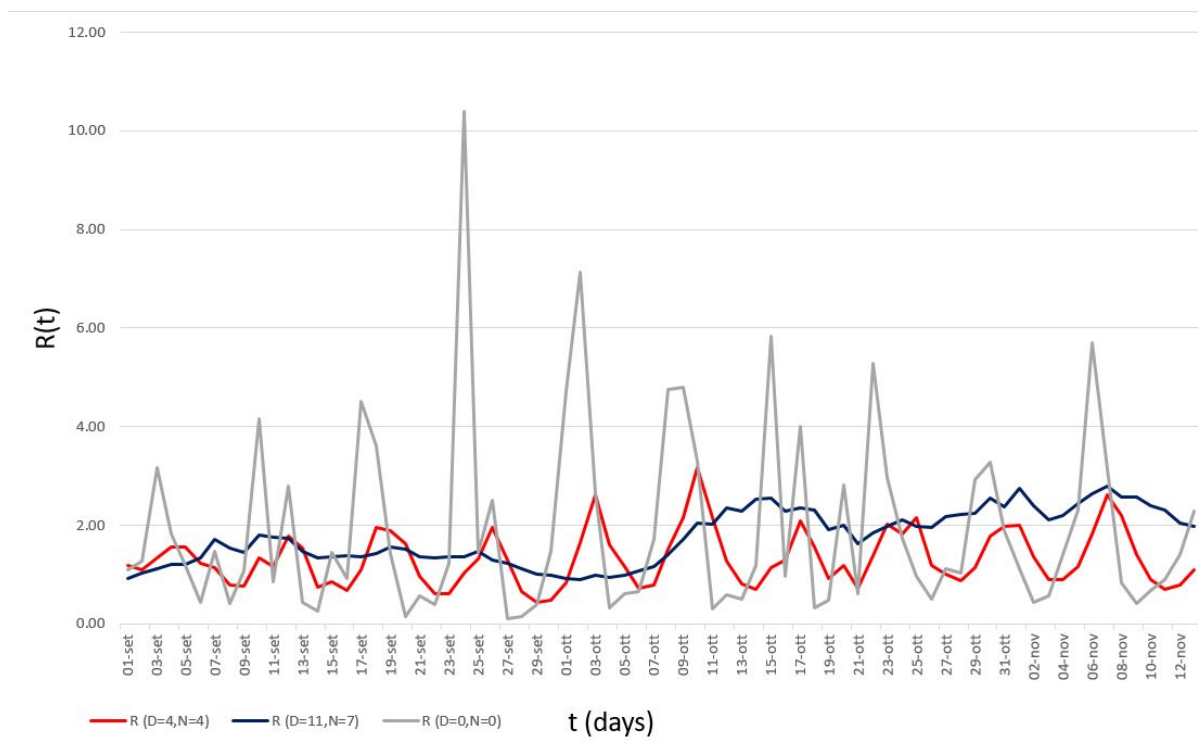


Figura 3: Andamento di $R(t)$ nel tempo al variare del metodo di calcolo

Notiamo immediatamente che variando anche solo leggermente il metodo di calcolo possiamo ottenere dei risultati con andamenti differenti. Utilizzando $N = 0, D = 0$ e $N = 4, D = 4$ vediamo che continuano essere presenti picchi settimanali, dovuti alle fluttuazioni di $C(t)$. Tali picchi vengono rimossi mediando su 7 giorni, l'andamento di tale traccia risulta infatti indipendente dalle altre.

Valore e interpretazione del risultato Ricordiamo che questo $R(t)$ è comunque ottenuto in modo approssimato, utilizzando un metodo profondamente diverso da quello usato da enti nazionali, come la protezione civile o l'ISS.

Quest'ultimo infatti fornisce settimanalmente un valore del numero di riproduzione di base per le regioni, calcolato solo sulla base dei soggetti sintomatici. Il metodo adottato è un metodo Monte Carlo basato su catena di Markov.[4]

Il valore da noi stimato con il metodo di Kohlberg-Neyman è fornito giornalmente sul territorio veronese e non vuole essere una alternativa ai dati forniti da enti nazionali, che vanno considerati come valori di riferimento. Consigliamo di vederlo infatti come un parametro qualitativo per poter comprendere, almeno intuitivamente, come procede l'andamento di $R(t)$ per il nostro territorio.

Riferimenti bibliografici

- [1] E. Kohlberg, A. Neyman "Demystifying the Math of the Coronavirus", (2020), Harvard Business School
- [2] Ministero della salute - Nuovo Coronavirus, <http://www.salute.gov.it/portale/nuovocoronavirus/homeNuovoCoronavirus.jsp>
- [3] Ministero della Salute - Covid-19: indicazioni per la durata e il termine dell'isolamento e della quarantena [http://www.salute.gov.it/portale/nuovocoronavirus/dettaglioNotizieNuovoCoronavirus.jsp?lingua=italiano&id=5117#:~:text=Le%20persone%20asintomatiche%20risultate%20positive,\(10%20giorni%20%2B%20test\).](http://www.salute.gov.it/portale/nuovocoronavirus/dettaglioNotizieNuovoCoronavirus.jsp?lingua=italiano&id=5117#:~:text=Le%20persone%20asintomatiche%20risultate%20positive,(10%20giorni%20%2B%20test).)
- [4] Istituto Superiore di Sanità - FAQ sul calcolo di Rt https://www.iss.it/primo-piano/-/asset_publisher/o4oGR9qmvUz9/content/faq-sul-calcolo-del-rt